N. B. — *Les parties* II *et* III *sont indépendantes mais dépendent toutes les deux de la partie* I.

Dans tout le problème, on désignera par $\mathbf{P}_n$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels ($n \in \mathbf{N}$). On conviendra des abus de notation suivants :

— Un polynôme et la fonction qu'il définit sur un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point seront désignés de la même façon.

Les mots « polynôme » et « fonction polynôme » auront donc le même sens;

— $\mathbf{P}_n$ représentera aussi bien les polynômes de degré inférieur ou égal à n que les fonctions polynômes associées sur un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point.

On désignera par $\tilde{\mathbf{P}}_n$ la partie de $\mathbf{P}_n$ constituée de polynômes de degré n exactement, dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1 (ce sont les polynômes de degré n, « normalisés »).

Dans tout le problème I désignera l'intervalle $[-1, +1]$. L'ensemble des fonctions continues sur I sera noté $\mathcal{C}(I)$.

On rappelle que, E étant un espace vectoriel réel muni d'une norme N, on dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge vers un élément x de E si et seulement si : $\lim_{n \to +\infty} N(x - x_n) = 0$.

On rappelle que :

$\mathbf{N}^* = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \neq 0 \}$ et $\mathbf{R}_+^* = \{ x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \} = \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$

I

On appelle polynôme de Tchebychev tout polynôme dont la fonction polynomiale associée est définie sur I par :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x), \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}$$

Q. 1. Montrer la relation de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

pour n entier supérieur ou égal à 1.

En déduire que T_n est bien une fonction polynôme et que le degré de T_n est n.

Calculer le coefficient de plus haut degré de T_n.

Calculer : $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

Q. 2. Démontrer que la famille $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{P}_n$.

Q. 3. Déterminer les racines du polynôme T_n et montrer qu'elles sont toutes réelles et appartiennent à I.

Q. 4. Montrer que la fonction T_n atteint sur I ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

Q. 5. Calculer et représenter graphiquement les fonctions T_2, T_3, T_4, T_5 définies sur I (on tracera T_2, T_3, T_4 sur un même graphique et T_5 sur un autre).

Q. 6. Démontrer la relation :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1 - x^2)^k$$

où q désigne la partie entière de $n/2$.

II

Q. 1. Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

a un sens.

Q. 2. Montrer que l'application :

$$(f, g) \longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)\, g(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}(I)$.

(On rappelle à cet effet que $(f, g) \longrightarrow \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}(I)$ si c'est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}(I)$ vérifiant :

i. pour tout f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, $\langle f, f \rangle \geqslant 0$

ii. $\langle f, f \rangle = 0$ est équivalent à $f = 0$.)

On munit dorénavant $\mathcal{C}(I)$ de la norme euclidienne associée que l'on notera :

$$\|f\|_t = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

(on ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une norme).

.../...

Q. 3. Calculer pour $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}$ l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

En déduire une suite de polynômes t_n, obtenus simplement à partir des T_n, vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\int_{-1}^{+1} t_n(x)\, t_m(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad \| t_n \|_t = 1\,.$$

B

On se propose d'étudier l'équation différentielle :

(*) $\quad (1-x^2) f''(x) - x f'(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad$ où $\quad \omega \in \mathbf{N}$.

Q. 4. Soit Φ l'application qui, à f deux fois dérivable sur I, associe :

$\Phi(f) = F$ tel que $F(x) = (1-x^2) f''(x) - x f'(x)$ pour $x \in I$.

Montrer que Φ est linéaire.

Résoudre sur l'intervalle $]-1, +1[$ l'équation différentielle :

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = 0\,.$$

En déduire le noyau de Φ.

Q. 5. Montrer que si f et g sont deux fois continûment dérivables sur I alors :

$$\langle \Phi(f), g \rangle = \langle f, \Phi(g) \rangle\,.$$

Q. 6. Montrer que : $\Phi(\mathbf{P}_n) \subset \mathbf{P}_n$. L'image d'un polynôme de degré n est-elle toujours un polynôme de degré n lorsque $n \in \mathbf{N}$?

Q. 7. Démontrer que si $P \in \mathbf{P}_n$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\Phi(P) + \lambda P \in \mathbf{P}_{n-1}\,.$$

Montrer que si de plus P est tel que $\forall s \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\, x^s\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

il en est de même de $\Phi(P) + \lambda P$.

En déduire : $\quad \| \Phi(P) + \lambda P \|_t = 0\,.$

Q. 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.

Déterminer les éléments propres de la restriction de Φ à l'espace vectoriel $\mathbf{P}_n$. En déduire que cette restriction est diagonalisable.

Q. 9. Dans cette question on suppose $\omega \in \mathbf{N}^*$.

Donner une solution particulière sur I de l'équation différentielle (*).

Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(\omega \operatorname{Arc\,cos} x)$ est aussi solution de (*) sur $]-1, +1[$.

En déduire l'ensemble des solutions de (*) sur l'intervalle $]-1, +1[$.

III On considère l'application qui à $f \in \mathcal{C}(I)$ associe :

$$\| f \| = \sup_{t \in I} | f(t) |\,.$$

On admet que cette application est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$. Dans cette partie III, on suppose $\mathcal{C}(I)$ muni de cette norme. Le tracé des fonctions de la question I. Q. 5. pourra être utile à la compréhension du A de cette partie.

On désignera par $\tilde{T}_n$ le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ si $n \geqslant 1$, et on posera $\tilde{T}_0 = T_0$.

A

Q. 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\| \tilde{T}_n \| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Q. 2. Montrer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, qu'il n'existe pas de polynômes $Q \in \tilde{\mathbf{P}}_n$ tels que $\| Q \| < \frac{1}{2^{n-1}}$ (pour cela on regardera le nombre de racines du polynôme $\tilde{T}_n - Q$ dans I).

En déduire que la borne inférieure $\operatorname{Inf}_{Q \in \tilde{\mathbf{P}}_n} \| Q \|$ est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$ et qu'elle est atteinte pour un certain polynôme de $\tilde{\mathbf{P}}_n$.

Q. 3. Démontrer que lorsque $n = 1$ et $n = 2$, $\operatorname{Inf}_{Q \in \tilde{\mathbf{P}}_n} \| Q \|$ est atteinte en un seul point de $\tilde{\mathbf{P}}_n$.

.../...

B

Q. 4. Étant donnés $(n+1)$ points distincts de I :

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{C}(\mathrm{I}),$$

montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_n appartenant à $\mathbf{P}_n$ vérifiant les conditions :

$$P_n(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

(On pourra par exemple interpréter ces conditions sous forme d'un système linéaire et montrer que la matrice ou l'endomorphisme associé à ce système est inversible.)

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme d'interpolation relatif à f et aux points $\{x_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Q. 5. Soit f une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I et P_n son polynôme d'interpolation relatif aux points $\{x_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$

a. Soit $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. On considère la fonction définie sur I :

$$\psi(t) = f(t) - P_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \ldots, (t - x_n)\,A$$

où A est une constante telle que $\psi(x) = 0$. En utilisant un certain nombre de fois le théorème de Rolle montrer qu'il existe $\xi \in]-1, +1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

b. En déduire que, si $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, alors :

$$\forall\, x \in [-1, +1],\ \exists\, \xi \in]-1, +1[$$

tel que

$$f(x) - P_n(x) = \pi(x)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\,.$$

c. Montrer que

$$\|f - P_n\| \leqslant \frac{1}{(n+1)\,!}\,\|f^{(n+1)}\| \,.\, \|\pi\|\,.$$

Q. 6. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I.

Montrer en utilisant A que l'on peut trouver une suite de polynômes d'interpolation P_n tels que l'on ait les majorations :

$$\|f - P_n\| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)\,!\,2^n}\,.$$

En déduire une condition suffisante sur f, indéfiniment dérivable sur I, pour que f soit limite dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}(\mathrm{I})$, d'une suite de polynômes d'interpolation.

Q. 7. On se propose de montrer que la série entière

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}\,,$$

convergente sur I, est « mieux approchée » par les polynômes d'interpolation P_n de la question Q. 6 que par les sommes partielles :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!}\,.$$

a. Montrer la double inégalité :

$$\frac{1}{e\,(n+1)\,!\,2^n} \leqslant \|e^x - P_n(x)\| \leqslant \frac{e}{(n+1)\,!\,2^n}\,.$$

b. Montrer que :

$$\|e^x - S_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k\,!} \right\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k\,!}\,.$$

En déduire la double inégalité :

$$\frac{1}{(n+1)\,!} < \|e^x - S_n(x)\| \leqslant \frac{n+2}{n+1}\,\frac{1}{(n+1)\,!}\,.$$

c. Comparer l'ordre de grandeur de

$$\|e^x - P_n(x)\| \quad \text{et de} \quad \|e^x - S_n(x)\|$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail